受験準備講座『チャレンジ』2月号(難関)

ここまで学んできた基本事項をもとに、より発展的な2次関数の問題に挑戦してみよう。

第1回 数と式・2次関数［1］
～絶対値を含む方程式・不等式～

取り組み時間 50分

◀本章で取り上げるような，方程式や不等式に絶対値を含む問題は，入試で頻出である。絶対値を苦手とする受験生は多い。しかし，「絶対値の中身の正負で場合分けをして絶対値記号をはずす」という基本さえ身につけておけばよい。場合分けは数学全般において重要な手法になるので，しっかり学習しておこう。

講義 まず「到達問題」で問われていることを把握してから，「アプローチ問題」と解説を読んで，解法を理解しよう。

到達問題

入試 (1) 2次不等式 $x^2-3|x-1|-7\leqq 0$ を解け。 ('10 日本大・医)

入試 (2) 実数 x に対し，$f(x)=(x-1)|x-5|+6$ とおく。$f(x)=0$ の解は $\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}$。さらに k を実数の定数とするとき，$f(x)=k$ の異なる解の個数が3となるような k の値の範囲は $\boxed{エ}<k<\boxed{オカ}$。 ('12 法政大・文系)

到達問題 攻略のカギ

方程式や不等式の問題で絶対値を含むものは少なくない。場合分けなどの状況判断ができるかどうかが問われているのである。場合分けによって絶対値記号をはずすことは，その境界の値を見つけることができるなら難しいものではないが，単に場合分けして計算だけで解くのはやっかいなこともある。そのようなときには，グラフを利用して視覚化してみよう。

(1) は不等式の問題，(2) は方程式の解の個数の問題だが，次のアプローチ問題で絶対値を含む方程式，不等式の取り扱いを確認しておこう。

アプローチ問題

(1) 方程式 $x^2-2=|x|$ を解け。

(2) 不等式 $x^2-2<|x|$ を解け。

アプローチ問題の解説

与えられた問題が方程式でも不等式でも，絶対値を含む場合の最も基本となる考え方は，場合分けをして絶対値記号をはずすことだ。では，絶対値記号をはずすにはどのような場合に分けるのか，これを考察してみよう。

実数 a の絶対値について，次のことが成り立つ。

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$ ◀A

このことを用いて，絶対値記号の中身が正になるか負になるかで場合分けをして，絶対値記号をはずす。言い換えると，「絶対値記号の中身が0となる値」を境にして場合分けするということだ。

そうすると，(1) の場合分けは次のようになる。

(i) $x\geqq 0$ のとき，$x^2-2=x$

(ii) $x<0$ のとき，$x^2-2=-x$

(1) では，この2つの場合についてそれぞれ，方程式を解けばよいのだが，そのとき，(i)では $x\geqq 0$ の条件のもとで解き，(ii)では $x<0$ の条件のもとで解くことに注意しよう。すなわち，方程式の解を求めたら，得られた解が場合分けの条件に適するかどうかのチェックを忘れないようにしなければならない。ここでのポイントはこれだ。

こう考えてもOK

A
$|a|$ についての場合分けは，
$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ -a & (a\leqq 0) \end{cases}$ でもよい。

解法STEP 1 絶対値記号の中身の正負で場合分け

続いて，(2) は不等式である。(1) と同じように場合分けをして絶対値記号をはずしてもよいが，ここではさらに，うまく解く方法を考えてみよう。グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して視覚化して考えるのである。◀B

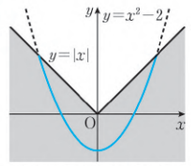
(2) の不等式の左辺と右辺をそれぞれ $y=x^2-2$，$y=|x|$ という2つの関数と見なし，不等式の大小関係をグラフの上下関係に読み換えるのである。すなわち，$x^2-2<|x|$ なので，$y=|x|$ のグラフより，$y=x^2-2$ のグラフが下方にある部分を調べ，そのような x の値の範囲が求める不等式の解となる。◀C D

解法STEP 2 グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して考える

方程式ならグラフの共有点，不等式ならグラフの上下関係がカギとなる。それでは，解答を見ていこう。

B
この解法は，絶対値を含む問題ではよく用いられる。

C



$y=|x|$ のグラフより下方の領域に含まれる $y=x^2-2$ のグラフの x の値の範囲が不等式の解となる。

D
アドバイス
(2) でも，解法STEP 1の「絶対値記号の中身の正負で場合分け」だけで解くことができるが，グラフを利用するほうが速い。すなわち計算量をうんと減らすことができる。

アプローチ問題の解答

【解答】

(1) $x^2-2=|x|$ …… ① ◀E

(i) $x\geqq 0$ のとき，①は $x^2-2=x$ となるので，$x^2-x-2=0$

よって，$(x+1)(x-2)=0$ から，$x=-1,\ 2$

$x\geqq 0$ を満たすのは，$x=2$ ◀F

(ii) $x<0$ のとき，①は $x^2-2=-x$ となるので，$x^2+x-2=0$

よって，$(x-1)(x+2)=0$ から，$x=-2,\ 1$

$x<0$ を満たすのは，$x=-2$ ◀F

(i)，(ii)より，

$x=2,\ -2$ ……(答)

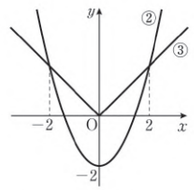
(2) $y=x^2-2$ …… ②，$y=|x|$ …… ③

とおく。与えられた不等式の解は，②のグラフが③のグラフの下方にあるような x の値の範囲である。

(1) より，②，③のグラフは右の図のようになる。

よって，グラフから，

$-2<x<2$ ……(答)



解法STEP 1 絶対値記号の中身の正負で場合分け

E
$|x|$ の中身が0となる $x=0$ を境目に $x\geqq 0$，$x<0$ の2つに場合分け。

落とし穴
F
場合分けの条件に適するかどうかのチェックを忘れないように。

解法STEP 2 グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して考える

入試につながる 解法STEPまとめ

絶対値を含む方程式・不等式の問題では

1 絶対値記号の中身の正負で場合分け

2 グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して考える

ここで紹介している解法STEPは、入試でも必要とされる内容。この章でしっかり身につけよう。

第1回 数と式・2次関数［1］ ～絶対値を含む方程式・不等式～

到達問題の解説

到達問題をもう一度見てみよう

(1) 2次不等式 $x^2-3|x-1|-7\leqq 0$ を解きなさい。 ('10 日本大・医)

(2) 実数 x に対し，$f(x)=(x-1)|x-5|+6$ とおく。$f(x)=0$ の解は $\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}$。さらに k を実数の定数とするとき，$f(x)=k$ の異なる解の個数が3となるような k の値の範囲は $\boxed{エ}<k<\boxed{オカ}$。 ('12 法政大・文系)

到達問題もアプローチ問題と同様に，絶対値を含む不等式と，方程式の解の個数に関する問題だ。「アプローチ問題」で学んだ解法 STEP を踏まえながら考えていこう。

解法STEP 1 絶対値記号の中身の正負で場合分け

(1)で与えられた不等式をみると，その式の中に，絶対値 $|x-1|$ が現れている。今度はアプローチ問題のような，$x\geqq 0$ と $x<0$ の場合分けではない。絶対値記号の中身 $x-1$ の正負で場合分けするのであるから，

(i) $x\geqq 1$ のとき

(ii) $x<1$ のとき

に分けることになる。

解法STEP 2 グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して考える

与えられた不等式 $x^2-3|x-1|-7\leqq 0$ をグラフの問題に読み換えてみよう。といっても，左辺に絶対値とそれ以外の項とが混在している。そこで，グラフを利用して考える準備として，不等式を変形してみよう。もちろんアプローチ問題と同じ方針だ。

$$x^2-3|x-1|-7\leqq 0 \iff x^2-7\leqq 3|x-1|$$

これより，$y=x^2-7$ のグラフが $y=3|x-1|$ のグラフの下方にあるか交わるような x の値の範囲を求めればよいことになる。◀G

(2)は，解の個数がテーマになっている。絶対値記号の中身の正負で，

(i) $x\geqq 5$ のとき

(ii) $x<5$ のとき ◀H

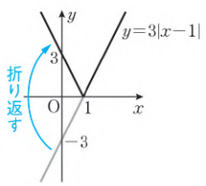
で2通りに場合分けし，グラフを考えよう。グラフから，$f(x)=0$ は，明らかに $x<5$ の場合にのみ解をもつことがわかる。

後半は，解の個数がテーマになっている。方程式 $f(x)=k$ の解は，$y=f(x)$ のグラフと，$y=k$ のグラフの共有点に読み換えることができる。$y=k$ のグラフは，k の値によって x 軸に対して平行に移動する直線である。この直線を平行移動させて，$y=f(x)$ のグラフと3点を共有するような範囲を調べればよい。

それでは解答を見てみよう。

G

絶対値のみ，または絶対値の定数倍の項のみからなる関数のグラフは，絶対値記号をはずした関数のグラフの x 軸より下の部分を y 軸の正の方向に折り返してかける。



H

こう考えてもOK

この場合分けは，

(i) $x>5$ のとき

(ii) $x\leqq 5$ のとき

としてもよい。

到達問題の解答

【解答】

(1) $x^2-3|x-1|-7\leqq 0 \iff x^2-7\leqq 3|x-1|$

から，

$y=x^2-7$ …… ① $y=3|x-1|$ …… ②

とおくと，与えられた不等式の解は，①のグラフが②のグラフの下方にあるか交わるような x の値の範囲である。

②は，$y=3|x-1|=\begin{cases}3(x-1) & (x\geqq 1)\\ -3(x-1) & (x<1)\end{cases}$

となることから，①，②の共有点の x 座標を求めると，

(i) $x\geqq 1$ のとき，$x^2-7=3|x-1|$ から，$x^2-7=3(x-1)$

よって，$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$x\geqq 1$ より，$x=4$ ◀I

(ii) $x<1$ のとき，$x^2-7=3|x-1|$ から，$x^2-7=-3(x-1)$

よって，$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$x<1$ より，$x=-5$

(i)，(ii)より，①，②の共有点の x 座標は，$x=-5,\ 4$

よって，①，②のグラフは右上の図のようになり，与えられた不等式の解は，$-5\leqq x\leqq 4$ …… (答)

(2) $f(x)=(x-1)|x-5|+6$ について

(i) $x\geqq 5$ のとき

$f(x)=(x-1)(x-5)+6=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

(ii) $x<5$ のとき

$f(x)=-(x-1)(x-5)+6=-x^2+6x+1=-(x-3)^2+10$

$y=f(x)$ のグラフは右の図。◀J

よって，$f(x)=0$ の解は，$x<5$ において，$-(x-3)^2+10=0$ を解いて，$x=3-\sqrt{10}$ …… アイウの (答)

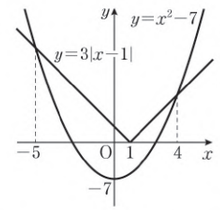
$f(x)=k$ の異なる解の個数が3となるのは，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数が3となるときであり，求める k の値の範囲は，$6<k<10$ …… エオカの (答)

解法STEP 1 絶対値記号の中身の正負で場合分け

I

$(x-4)(x+1)=0$ から $x=4,\ -1$ となるが，$x\geqq 1$ であることを考慮して，$x=4$

解法STEP 2 グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して考える

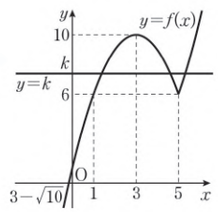


解法STEP 1 絶対値記号の中身の正負で場合分け

J

$x\geqq 5,\ x<5$ のときを合わせて

$f(x)=\begin{cases}(x-3)^2+2 & (x\geqq 5)\\ -(x-3)^2+10 & (x<5)\end{cases}$



解法STEP 2 グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して考える

ワンランクUP演習 取り組んでみて，難しかったら，講義に戻って考えよう。

入試 実数 x の関数 $f(x)=|x-1|(x-2)$ を考える。$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+a$ との共有点の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるかを調べよ。('11 千葉大・教育)

入試につながるヒント 定数 a を分離することを考えよう。

解答・解説はp.38 ▶▶▶

第1回 数と式・2次関数［1］～絶対値を含む方程式・不等式～ 演習 解答・解説

【解答】

実数 x の関数 $f(x)=|x-1|(x-2)$ について，

$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+a$ との共有点の個数は，◀A

方程式 $f(x)=x+a$ の異なる実数解の個数 ◀B

に等しく，これを変形した

方程式 $f(x)-x=a$ の異なる実数解の個数 ◀B

に等しい。

したがって，求める共有点の個数は，

$y=f(x)-x$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数 ┘5点

に等しい。

そこで，まず，

$y=f(x)-x$

について考える。

(i) $x\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)-x&=|x-1|(x-2)-x\\ &=(x-1)(x-2)-x\\ &=x^2-4x+2\\ &=(x-2)^2-2 \end{aligned}$$

(ii) $x<1$ のとき

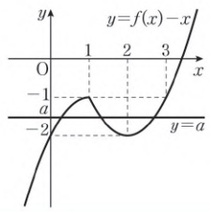
$$\begin{aligned} f(x)-x&=|x-1|(x-2)-x\\ &=-(x-1)(x-2)-x\\ &=-x^2+2x-2\\ &=-(x-1)^2-1 \end{aligned}$$

よって，

$$f(x)-x=\begin{cases}(x-2)^2-2 & (x\geqq 1)\\ -(x-1)^2-1 & (x<1)\end{cases}$$ ┘5点

となる。

これより，$y=f(x)-x$ のグラフは右の図のようになる。┘5点



$y=f(x)-x$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数を，定数 a の値によってどのように変わるかを調べることにより，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+a$ との共有点の個数は，次のようになる。

$a<-2$ のとき，1個
$a=-2$ のとき，2個
$-2<a<-1$ のとき，3個
$a=-1$ のとき，2個
$-1<a$ のとき，1個
……（答）┘5点

A
$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+a$ との共有点では，直線が「ななめ」になっていて考えにくい。そこで，同じ内容を直線が「水平に」なるようにできないかと考えて式変形することで，$y=f(x)-x$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点で考えることにする。

B
「$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+a$ の共有点の個数」と「$y=f(x)-x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数」が等しいと，ダイレクトに論じることは飛躍があるので，いったん方程式の実数解の個数に読み換えている。

解答STEP 1 絶対値記号の中身の正負で場合分け
式が複雑になっても，絶対値記号の中身にだけ注目して，$x-1$ の正負で場合分けをする。

解答STEP 2 グラフの問題に読み換えて，グラフを利用して考える
直線 $y=a$ を上下に動かして調べる。

入試に効く 落とし穴 攻略！

絶対値はいつも場合分け？

絶対値は，絶対値記号をはずすことをまずは考えよう。はずし方の基本は，「場合分け」である。本解でも，そのやり方をとっている。

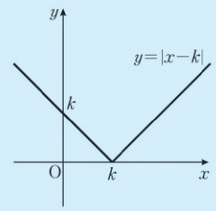
実数 a の絶対値には次の性質がある。

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

これより，変数 x，定数 k について，$|x-k|$ は，k の値にかかわらず

$$|x-k|=\begin{cases}x-k & (x\geqq k)\\ -(x-k) & (x<k)\end{cases}$$

と場合分けされる。



これが，$|x^2-k|$ ではどうなるだろうか。

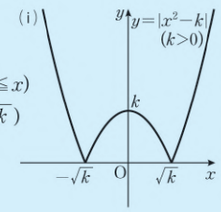
このときは，k の値により様子が異なる。

(i) $k>0$ のとき，

$$\begin{aligned} |x^2-k|&=|(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})|\\ &=\begin{cases}(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) & (x\leqq -\sqrt{k},\ \sqrt{k}\leqq x)\\ -(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) & (-\sqrt{k}<x<\sqrt{k})\end{cases} \end{aligned}$$

と，3つの区間に場合分けされることになり，

$y=|x^2-k|$ のグラフは右のようになる。

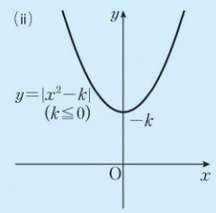


(ii) $k\leqq 0$ のとき，

$x^2\geqq 0$，$-k\geqq 0$ より，$x^2-k\geqq 0$ であるから，

$|x^2-k|=x^2-k$

となり，場合分けは現れない。



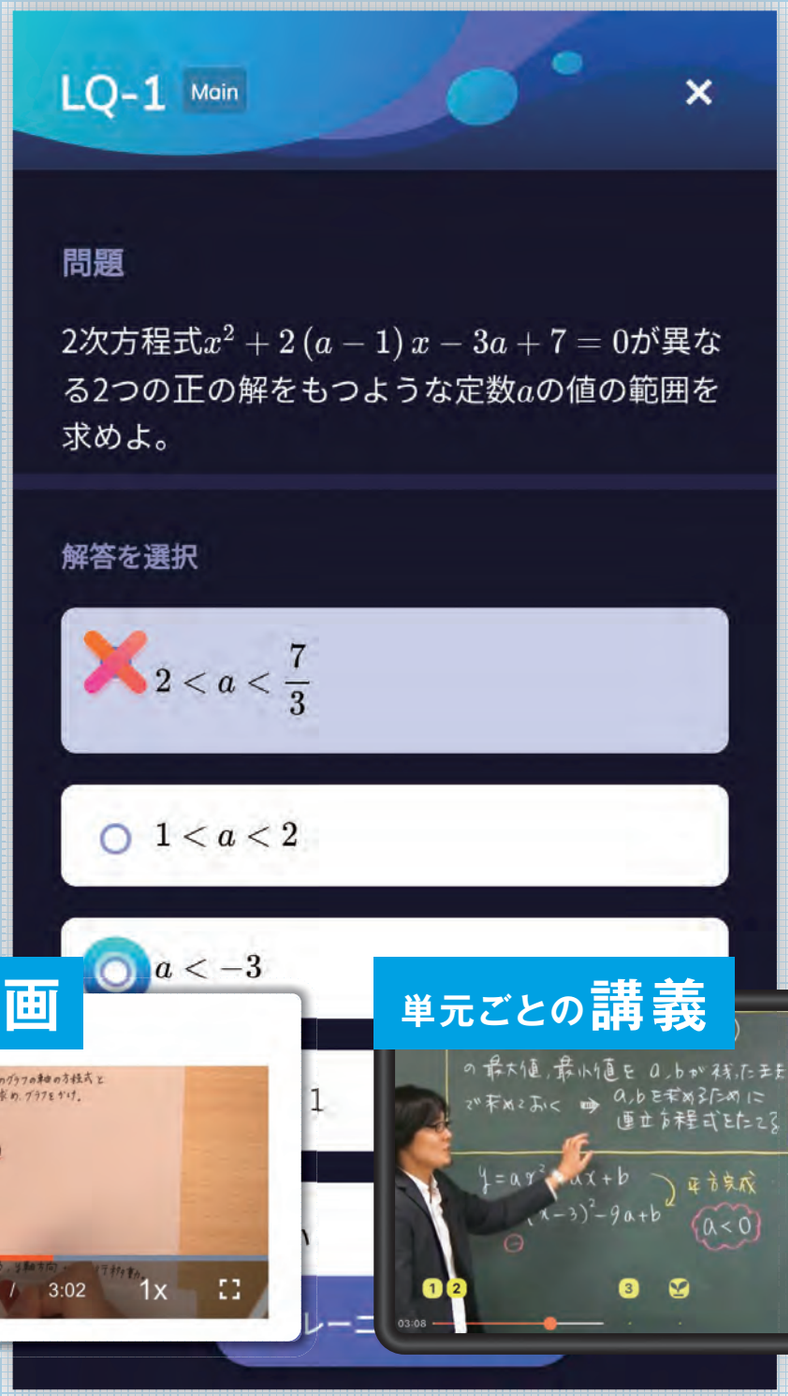
2次関数について、知識の確認だけではなく、問題を解く考え方の理解が深まったかな？
次のページからは「国公立スタンダード合格プラン」の問題も体験してみよう。

国公立スタンダード 数学 個別ニガテ攻略アプリ

AIStLike 基礎事項 は、AI×プロ講師が一人ひとりの苦手に合わせて個別に攻 略。受験勉強スタートの土台を作ります！

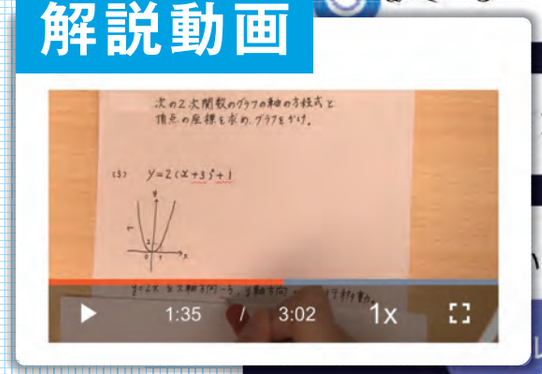
「受験準備チャレンジ（数学）」の国公立スタンダードプランは、個別の苦手攻略アプリがメインの教材となります。

AIによる個別の問題対応。つまずきパターンを分析して苦手の原因に合った1問を出題するから効率よく力が伸ばせます。

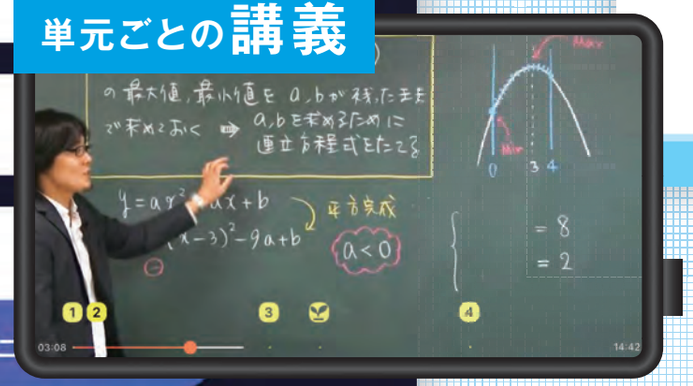


数学は全問解説動画つき。わからないところは単元の講義でプロ講師が解説するから迷わず演習に取り組めます。

解説動画



単元ごとの講義



「数学」はいずれのプランも「AIStLike」で基礎事項の理解を深めて、「受験準備チャレンジ」で実際に問題が解けるか理解を定着させていきます。

到達確認問題 ユニット1

取り組み時間 40分

出題頻度 47%

1 数と式① 絶対値を含む方程式・不等式

(1) $y=|2x+3|+|x|$ のグラフをかけ。

(2) (1)のグラフを利用して，不等式 $|2x+3|+|x|<6$ を解け。

解答解説はp.16へ ▸▸▸

仕上げの到達度確認は実際に解けるか紙のテキストでチェック。わかったつもりを作らない。

到達確認問題 ユニット1

1 数と式① 絶対値を含む方程式・不等式

到達確認ポイント

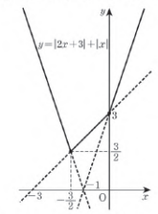
絶対値記号の基本的な扱い方を身につけよう。まずは場合分けして絶対値記号をはずそう。(1)では，はずした式をもとに，範囲ごとにかいたグラフをつなげられるか。(2)の不等式の解は，(1)でかいたグラフ上で $y<6$ を満たす x の値の範囲のことであるかどうかを押さえられるかが，ポイントとなる。

解答

(1)

$$|2x+3|+|x|=\begin{cases}-(2x+3)-x=-3x-3 & \left(x<-\frac{3}{2}\right)\\ (2x+3)-x=x+3 & \left(-\frac{3}{2}\leqq x<0\right)\\ (2x+3)+x=3x+3 & (x\geqq 0)\end{cases}$$

であるから，$y=|2x+3|+|x|$ のグラフは下の図のようになる。



……(答)

(2) $|2x+3|+|x|=6$ を満たす x の値を求めると，

(i) $x<-\frac{3}{2}$ のとき

$-3x-3=6$　　よって，$x=-3$

(ii) $-\frac{3}{2}\leqq x<0$ のとき　$\left(x<-\frac{3}{2}\text{ を満たす}\right)$

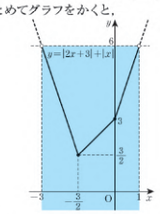
$x+3=6$　　よって，$x=3$

$\left(-\frac{3}{2}\leqq x<0\text{ を満たさないので，不適}\right)$

(iii) $x\geqq 0$ のとき

$3x+3=6$　　よって，$x=1$（$x\geqq 0$ を満たす）

以上をまとめてグラフをかくと，



$y=|2x+3|+|x|$ のグラフ上で $y<6$ となる x の値の範囲を求めて，

$-3<x<1$ ……(答)

STEP1 絶対値記号をはずす

場合分けして，$|2x+3|+|x|$ の絶対値記号をはずす。

$$|2x+3|=\begin{cases}2x+3 & (2x+3\geqq 0\text{のとき})\\ -(2x+3) & (2x+3<0\text{のとき})\end{cases}$$

$$|x|=\begin{cases}x & (x\geqq 0\text{のとき})\\ -x & (x<0\text{のとき})\end{cases}$$

これらをまとめると，このようになる。

STEP2 グラフをかく

各場合のグラフをつないで，1つのグラフにする。

(1)の3つの場合分けによる。

STEP3 方程式を解く

$|2x+3|+|x|=6$ となるときの x の値を求めるために方程式を解く。このとき，x の値が場合分けの条件を満たすか必ずチェックしよう。

＼映像でチェック／

絶対値を含む不等式の解き方の基本を確認！